数理解析研究所講究録
第 1855 巻 2013 年 245-252

ガウス型べき級数の実零点過程の相関関数とパフィアン

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 松本 詔
Sho Matsumoto
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所 白井朋之
Tomoyuki Shirai
Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

1. はじめに. Kac は実確率変数を係数にもつランダム多項式 $f_n(t)=\sum_{k=0}^{n}a_kt^k$ ($\{a_k\}_{k=0}^{n}$ は実標準正規分布をもつ i.i.d. 確率変数列) の実零点の個数 N_n の期待値について，その積分表示

$$\mathbb{E}[N_n]=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\sqrt{\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{(n+1)^2t^{2n}}{(t^{2n+2}-1)^2}}dt$$

を与えることにより Littlewood-Offord らの得た結果を精密化して，$n\to\infty$ で $\mathbb{E}[N_n]\sim\frac{2}{\pi}\log n$ となることを示した [10]. 上記の積分表示の興味深い幾何学的な説明が知られている [4]. Logan-Shepp は係数 $\{a_k\}$ が対称 α 安定分布の場合に結果を一般化し [12], Shepp-Vanderbei は $f_n(t)$ の複素零点の個数の期待値について調べた [18]. 本稿では，Kac の多項式において $n=\infty$ としたランダムべき級数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k\quad(|z|<1)$$

の零点過程について [14] で得られた結果を述べる．詳しくは [14] を参照のこと．

関連する結果として，係数 $\{\zeta_k\}_{k=0}^{\infty}$ が**複素**標準正規分布の場合は，Peres-Virág [15] によって，$f_{\mathbb{C}}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\zeta_kz^k$ の零点が，Bergman 核に付随する複素単位円板上の行列式点過程となることが示されている．Krishnapur は係数がランダム行列 (Ginibre アンサンブル) となる場合にこの結果を拡張している [11](7 節を参照のこと). また，(必ずしもガウス型でない) ランダム正則関数の零点過程から Peres-Virág の結果として得られる行列式点過程やその上半平面版への収束も調べられている [19].

2. パフィアンとハフニアン. まず，パフィアンとハフニアンの定義を思い出しておこう．標準的な確率論のテキストにはあまり登場しないが，特にハフニアンはガウス確率変数の積モーメントと密接な関係がある*1.

RIMS 研究集会「確率論シンポジウム」, Dec. 18-21, 2012

*1 ハフニアン (Hafnian) は，物理学者 E. R. Caianiello がこの概念を最初に思いついた地コペンハーゲンのラテン古名 Hafnia に因んで名付けたものである [3, 21].

$2n \times 2n$ の歪対称行列 $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le 2n}$ のパフィアン $\mathrm{Pf}\, B$ と，$2n \times 2n$ の対称行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 2n}$ のハフニアン $\mathrm{Hf}\, A$ はそれぞれ

$$\mathrm{Pf}\, B = \sum_{\eta \in \mathcal{F}_n} \epsilon(\eta) b_{\eta(1)\eta(2)} b_{\eta(3)\eta(4)} \cdots b_{\eta(2n-1)\eta(2n)}$$
$$\mathrm{Hf}\, A = \sum_{\eta \in \mathcal{F}_n} a_{\eta(1)\eta(2)} a_{\eta(3)\eta(4)} \cdots a_{\eta(2n-1)\eta(2n)}$$

と定義される．ただし，$\epsilon(\eta)$ は置換 η の符号，また

$$\mathcal{F}_n := \{\eta \in \mathcal{S}_{2n} \mid \eta(2i-1) < \eta(2i)(i = 1, 2, \ldots, n),\ \eta(1) < \eta(3) < \cdots < \eta(2n-1)\}.$$

例 1. $n = 1, 2$ の場合：$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ は

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{F}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

となるので，

$$\mathrm{Pf} \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ -b_{12} & 0 \end{pmatrix} = b_{12}, \quad \mathrm{Pf} \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} & b_{24} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 & b_{34} \\ -b_{14} & -b_{24} & -b_{34} & 0 \end{pmatrix} = b_{12}b_{34} - b_{13}b_{24} + b_{14}b_{23}$$

$$\mathrm{Hf} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{12}, \quad \mathrm{Hf} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} = a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$$

を得る．対角成分 $a_{ii}, i = 1, 2, \ldots, n$ は右辺の和にあらわれない．

パフィアンとハフニアンの違いは符号だけで，その状況は行列式とパーマネント (permanent)

$$\det A = \sum_{\eta \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sgn}(\eta) \prod_{i=1}^{n} a_{i\eta(i)}, \quad \mathrm{per}\, A = \sum_{\eta \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\eta(i)}$$

の違いに対応する．このアナロジーは，以下で述べる Borchardt による行列式とパーマネントに関する等式と，命題 3 の石川・川向・岡田によるパフィアンとハフニアンに関する等式との関係にもあらわれる．

パフィアンに関する性質を述べておこう．

命題 1. A は n 次正方行列，B は $2n$ 次歪対称行列，C は $2n$ 次正方行列とする．

- パフィアンは行列式の平方根: $\det B = (\mathrm{Pf}\, B)^2$.
- 次の意味でパフィアンは行列式の一般化：

$$\det A = (-1)^{n(n-1)/2}\, \mathrm{Pf} \begin{pmatrix} O & A \\ -A^T & O \end{pmatrix}.$$

- 共役に関する不変性：$\mathrm{Pf}(C^T BC) = \det C \cdot \mathrm{Pf}\, B$.

ハフニアンは実ガウス確率変数のモーメントと以下のような関係がある.

命題 2 (Wick の公式). $(X_1, X_2, \ldots, X_{2n})$ が平均 $\mathbf{0}$ の実ガウスベクトルのとき,

$$\mathbb{E}[X_1 X_2 \cdots X_{2n}] = \mathrm{Hf}(\mathbb{E}[X_i X_j])_{i,j=1}^{2n}. \tag{1}$$

また, $(Z_1, \ldots, Z_n, W_1, \ldots, W_n)$ が平均 $\mathbf{0}$ の複素ガウスベクトルのとき,

$$\mathbb{E}[Z_1 \cdots Z_n \overline{W_1 \ldots W_n}] = \mathrm{per}\left(\mathbb{E}[Z_i \overline{W_j}]\right)_{i,j=1}^{n}.$$

例 2. $n = 2$ のときの Wick の公式は以下のようになる.

$$\mathbb{E}[X_1X_2X_3X_4] = \mathbb{E}[X_1X_2]\mathbb{E}[X_3X_4] + \mathbb{E}[X_1X_3]\mathbb{E}[X_2X_4] + \mathbb{E}[X_1X_4]\mathbb{E}[X_2X_3].$$

特に, $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X$ とおくと,

$$\mathbb{E}[X^4] = 3(\mathbb{E}[X^2])^2$$

を得る. 一般に, Wick の公式 (1) において, $X_i = X$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ とすると

$$\mathbb{E}[X^{2n}] = |\mathcal{F}_n| \cdot (\mathbb{E}[X^2])^n$$

であるから, $|\mathcal{F}_n| = \mathbb{E}[X^{2n}]/(\mathbb{E}[X^2])^n = (2n-1)!!$ となることがわかる.

Borchardt(1855) によるコーシー行列式に関する等式 [1]

$$\det\left(\frac{1}{1 - s_i t_j}\right) \cdot \mathrm{per}\left(\frac{1}{1 - s_i t_j}\right) = \det\left(\frac{1}{(1 - s_i t_j)^2}\right)$$

のパフィアン版として石川・川向・岡田による以下の公式が知られている.

命題 3 ([9]).

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{s_i - t_j}{1 - s_i t_j}\right) \cdot \mathrm{Hf}\left(\frac{1}{1 - s_i t_j}\right) = \mathrm{Pf}\left(\frac{s_i - t_j}{(1 - s_i t_j)^2}\right).$$

実ガウス型べき級数 $f(z)$ の零点の相関関数の計算においてこの公式が重要な役割を果たす.

3. 実零点について. まず, $f(z)$ の実零点について述べる. $\{f(t), t \in (-1,1)\}$ は実ガウス過程でその共分散核は $\sigma(s,t) := \mathbb{E}[f(s)f(t)] = \frac{1}{1-st}$ となる. 定理 1 は, f の実零点過程がパフィアン点過程となることを述べている.

定理 1. f の実零点過程のルベーグ測度に関する n 点相関関数 $\rho_n(t_1, \ldots, t_n)$ は, 次のようにパフィアンで与えられる：$t_1, t_2, \ldots, t_n \in (-1, 1)$ に対し,

$$\rho_n(t_1, \ldots, t_n) = \pi^{-n}\, \mathrm{Pf}(\mathbb{K}(t_i, t_j))_{1 \le i,j \le n}.$$

ここで各 $\mathbb{K}(s,t)$ $(s,t\in(-1,1))$ は 2×2 の行列で，$\mathrm{Pf}(\mathbb{K}(t_i,t_j))_{1\le i,j\le n}$ は $2n\times 2n$ 歪対称行列 $(\mathbb{K}(t_i,t_j))_{1\le i,j\le n}$ のパフィアンである．また，$\mathbb{K}(s,t)$ は以下で与えられる．

$$\mathbb{K}(s,t)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\mathbb{K}_{22}(s,t) & \frac{\partial}{\partial s}\mathbb{K}_{22}(s,t)\\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{K}_{22}(s,t) & \mathbb{K}_{22}(s,t)\end{pmatrix},\quad \mathbb{K}_{22}(s,t)=\mathrm{sgn}(t-s)\arcsin\frac{\sigma(s,t)}{\sqrt{\sigma(s,s)\sigma(t,t)}}.$$

ただし，$\mathrm{sgn}\,t$ は $t>0$ で $\mathrm{sgn}\,t=+1$，$t<0$ で $\mathrm{sgn}\,t=-1$，$t=0$ のときは $\mathrm{sgn}\,0=0$ と定める．$\mathbb{K}(s,t)$ の成分を具体的に書き下すと，

$$\mathbb{K}_{11}(s,t)=\frac{s-t}{\sqrt{(1-s^2)(1-t^2)(1-st)^2}},\qquad \mathbb{K}_{12}(s,t)=\sqrt{\frac{1-t^2}{1-s^2}}\frac{1}{1-st},$$
$$\mathbb{K}_{21}(s,t)=-\sqrt{\frac{1-s^2}{1-t^2}}\frac{1}{1-st},\qquad \mathbb{K}_{22}(s,t)=\mathrm{sgn}(t-s)\arcsin\frac{\sqrt{(1-s^2)(1-t^2)}}{1-st}.$$

例 3. パフィアンによる相関関数の表式より以下のことがわかる．

1 点相関関数: $s\in(-1,1)$ に対して，

$$\rho_1(s)=\pi^{-1}\mathbb{K}_{12}(s,s)=\frac{1}{\pi(1-s^2)}.$$

2 点相関関数: $s,t\in(-1,1)$ に対して，

$$\begin{aligned}\rho_2(s,t)&=\frac{1}{\pi^2}\{\mathbb{K}_{12}(s,s)\mathbb{K}_{12}(t,t)-\mathbb{K}_{11}(s,t)\mathbb{K}_{22}(s,t)+\mathbb{K}_{12}(s,t)\mathbb{K}_{21}(s,t)\}\\&=\frac{1}{2\pi(1-s^2)^3}|t-s|+O(|t-s|^2).\end{aligned}$$

また，これらの表式より任意の $s,t\in(-1,1)$ に対して負相関の不等式

$$\rho_2(s,t)\le\rho_1(s)\rho_1(t)$$

が成り立つことがわかる．

4. 絶対値と符号の積モーメント

定理 1 の証明の過程で，絶対値と符号の積モーメントに関する以下の新しいパフィアン表示を得た．

定理 2. $t_1,t_2,\ldots,t_n\in(-1,1)$ が互いに異なるとき，

$$\mathbb{E}[|f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)|]=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2}(\det\Sigma)^{-\frac12}\,\mathrm{Pf}(\mathbb{K}(t_i,t_j))_{1\le i,j\le n}$$

が成り立つ．ここで，$\Sigma=(\sigma(t_i,t_j))_{1\le i,j\le n}$ とした．

定理 1 の証明は，この絶対値のモーメント $\mathbb{E}[|f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)|]$ を求める問題に帰着される．

また，次のように $f(t)$ の符号の偶数次モーメント $\mathbb{E}[\mathrm{sgn}\,f(t_1)\cdots\mathrm{sgn}\,f(t_{2n})]$ もパフィアンで書ける．なお，n が奇数の場合，$\mathbb{E}[\mathrm{sgn}\,f(t_1)\cdots\mathrm{sgn}\,f(t_n)]$ は恒等的に零である．

定理 3. $t_1, t_2, \ldots, t_{2n} \in (-1,1)$ が互いに異なるとき,

$$\mathbb{E}[\operatorname{sgn} f(t_1) \operatorname{sgn} f(t_2) \cdots \operatorname{sgn} f(t_{2n})] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \prod_{1 \le i < j \le 2n} \operatorname{sgn}(t_j - t_i) \cdot \mathrm{Pf}(\mathbb{K}_{22}(t_i, t_j))_{1 \le i,j \le 2n}$$

が成り立つ.

注意. 定理 3 は

$$\mathbb{E}[\operatorname{sgn} f(t_1) \operatorname{sgn} f(t_2) \cdots \operatorname{sgn} f(t_{2n})] = \mathrm{Pf}(\mathbb{E}[f(t_i) f(t_j)])_{1 \le i,j \le 2n}$$

とも書けるので, Wick の公式と同様に高次のモーメントが 2 次モーメントのみで表現できることを示す.

5. 複素零点について. $f(z)$ の複素零点についても相関関数がパフィアン表示を持つことを示す以下の結果を得た.

定理 4. $\mathbb{D}_+ = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1,\ \Im z > 0\}$ とする. $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{D}_+$ に対して, $f(z)$ の複素零点の n 点相関関数は

$$\rho_n^c(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{(\pi\sqrt{-1})^n} \prod_{j=1}^n \frac{1}{|1 - z_j^2|} \cdot \mathrm{Pf}(\mathbb{K}^c(z_i, z_j))_{1 \le i,j \le n}$$

となる. ただし, $\mathbb{K}^c(z,w)$ は 2×2 行列核で

$$\mathbb{K}^c(z,w) = \begin{pmatrix} \frac{z-w}{(1-zw)^2} & \frac{z-\bar{w}}{(1-z\bar{w})^2} \\ \frac{\bar{z}-w}{(1-\bar{z}w)^2} & \frac{\bar{z}-\bar{w}}{(1-\bar{z}\bar{w})^2} \end{pmatrix}$$

で与えられる.

例 4. 1 点相関関数は

$$\rho_1^c(z) = \frac{|z - \bar{z}|}{\pi |1 - z^2| (1 - |z|^2)^2},$$

2 点相関関数は

$$\rho_2^c(z,w) = \rho_1^c(z)\rho_1^c(w) + \frac{1}{\pi^2 |1 - z^2||1 - w^2|} \left(\left| \frac{z - w}{1 - zw} \right|^2 - \left| \frac{z - \bar{w}}{1 - z\bar{w}} \right|^2 \right)$$

となる. また, $z, w \in \mathbb{D}_+$ に対して, $\rho_2^c(z,w) < \rho_1^c(z)\rho_1^c(w)$ となることは簡単に確かめられる.

注意. 定理 1 と定理 4 については, Forrester [5] が独立にランダム行列の方法を用いて示している. われわれはランダム行列理論を経由せず, Hammersley によるガウス過程の零点に関する公式 [7, 8] と, 石川・川向・岡田らによるパフィアンに関する等式を用いて定理を証明した. その過程で定理 2 と 3 を得たことは既に述べた通りである.

6. 関連する結果.

- すべての成分が i.i.d. で $N_{\mathbb{R}}(0,1)$ に従う $N \times N$ 行列の固有値過程の $N \to \infty$ での弱極限として得られる点過程の相関関数は以下の相関核のパフィアンで与えられる [2, 6].

$$\mathbb{K}_{\mathsf{Gin}}(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\mathbb{K}_{22}(s,t) & \frac{\partial}{\partial s}\mathbb{K}_{22}(s,t) \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{K}_{22}(s,t) & \mathbb{K}_{22}(s,t) \end{pmatrix}.$$

ただし,

$$\mathbb{K}_{22}(s,t) = \mathrm{sgn}(t-s)\int_{|s-t|}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

- 強度 $\lambda > 0$ のポアソン点過程を初期配置とし，各点は独立な 1 次元ブラウン運動に従い，二つのブラウン運動が衝突したらともに消滅するようなものを annihilating B.M. $\{\mathbf{B}_\lambda(t), t > 0\}$ という．Maximal entrance law に対する annihilating B.M. とは，形式的には $\{\mathbf{B}_\lambda(t), t > 0\}$ の $\lambda \to \infty$ の極限で得られる確率過程である．時刻 $t > 0$ における配置を点過程とみなすと，(行列) 相関核

$$\mathbb{K}_t^{\mathsf{aBM}}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2t}}\mathbb{K}_{\mathsf{Gin}}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}, \frac{y}{\sqrt{2t}}\right)$$

に対するパフィアン点過程となる [20].

現在知られているパフィアン点過程の例では,

$$\mathbb{K}(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\mathbb{K}_{22}(s,t) & \frac{\partial}{\partial s}\mathbb{K}_{22}(s,t) \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{K}_{22}(s,t) & \mathbb{K}_{22}(s,t) \end{pmatrix}$$

の形の相関核をもつことが多い．行列式点過程で得られているような点過程を定めるための $\mathbb{K}$ に対する十分条件は知られていない．

7. ランダム行列からランダム解析関数へ. $(X_1, \ldots, X_n)$ が半径 $\sqrt{n}$ の $(n-1)$-次元球面 $S^{n-1}(\sqrt{n})$ 上の一様分布に従うとすると，各 k に対して

$$(X_1, \ldots, X_k) \xrightarrow{d} N(0, I_k)$$

となることが Poincaré によって注意されている [16]．この観察から McKean [13] はブラウン運動が無限次元球面 $S^\infty(\sqrt{\infty})$ 上の一様分布からのサンプルであるという立場の有用性について論じている．これと同様の考え方と Zyczkowski-Sommers [23] の結果を用いて，Krishnapur はランダム行列の固有値とガウス型の解析関数の零点を以下のように関係つけることにより，Peres-Virág の結果の行列版を示した [11]：Haar 測度に従って以下の $(k+N) \times (k+N)$ (ユニタリ，直交) 行列

$$U = \begin{pmatrix} A_{k\times k} & B_{k\times N} \\ C_{N\times k} & V_{N\times N} \end{pmatrix}$$

をサンプルする．$V = V_{N\times N}$ の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ として

$$f_N(z) := (-1)^N \det U \cdot \frac{\det(zI - V^*)}{\det(I - zV)} = (-1)^N \det U \cdot \prod_{k=1}^{N} \frac{z - \overline{\lambda}_k}{1 - z\lambda_k}$$

とおくと，

$$\underbrace{N^{k/2} f_N(z)}_{\text{ランダム行列の固有値}} \xrightarrow{d} \underbrace{\det\Big(\sum_{j=0}^{\infty} G_j z^j\Big)}_{\text{ランダム解析関数の零点}}$$

が成り立つ．ここで，G_j は $k \times k$ の i.i.d. Ginibre 行列．特に U が直交行列で $k = 1$ の場合には，極限で得られる右辺のランダム解析関数は本稿でテーマにした $f(z)$ となる．

最後に，これに関連して時間に依存したランダム解析関数の零点過程についてコメントする．$\{X_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ を定常分布から出発した Ornstein-Uhlenbeck 過程もしくは原点出発のブラウン運動の i.i.d. コピーとして，

$$f_t(z) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t) z^k$$

と定義する．OU 過程の場合は定常性により，またブラウン運動の場合はスケーリング性より，f_t の零点過程 ξ_t は t について定常である．時間に依存した零点過程 ξ_t の解析は直接には難しく見えるが，ランダム行列の固有値の時間発展の結果と上の Krishnapur の観察から解析するのも面白い問題ではないかと思われる．また，ξ_t の時空間の相関関数がパフィアンで記述できるかを調べるのも面白い問題である．

参考文献

[1] C. W. Borchardt, Bestimmung der symmetrischen Verbindungen vermittelst ihrer erzeugenden Funktion, Crelle' s Journal **53** (1855), 193–198.

[2] A. Borodin and C. D. Sinclair, The Ginibre ensemble of real random matrices and its scaling limits, Comm. Math. Phys. **291** (2009), no. 1, 177–224.

[3] E. R. Caianiello, On quantum field theoy I, Nuovo Cimento (9) **10** (1953), 1634–1652.

[4] A. Edelman and E. Kostlan, How many zeros of a random polynomial are real?, Bull. Amer. Math. Soc. **32** (1995), 1–37.

[5] P. J. Forrester, The limiting Kac random polynomial and truncated random orthogonal matrices, J. Stat. Mech. (2010), P12018. available at `arXiv:1009.3066v1`

[6] P. J. Forrester and T. Nagao, Eigenvalue statistics of the real Ginibre ensemble, Phys. Rev. Lett. **99**, (2007), 050603, 4 pp.

[7] J. M. Hammersley, The zeros of a random polynomial, Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954–1955, vol. II, pp. 89–111. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1956.

[8] J. B. Hough, M. Krishnapur, Y. Peres and B. Virág, Zeros of Gaussian Analytic Functions and Determinantal Point Processes, University Lecture Series, 51. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[9] M. Ishikawa, H. Kawamuko, and S. Okada, A Pfaffian-Hafnian analogue of Borchardt's identity, Electron. J. Combin. **12** (2005), Note 9, 8 pp. (electronic).

[10] M. Kac, On the average number of real roots of a random algebraic equation, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 314–320.

[11] M. Krishnapur, From random matrices to random analytic functions, Ann. Probab. **37** (2009), 314–346.

[12] B. F. Logan and L. A. Shepp, Real zeros of random polynomials. II, Proc. London Math. Soc. **18** (1968), 308–314.

[13] P. McKean, Geometry of differential space, Ann. Probab. **1** (1973), 197–206.

[14] S. Matsumoto and T. Shirai, Correlation functions for zeros of a Gaussian power series and Pfaffians, available at `http://arxiv.org/abs/1212.6108`

[15] Y. Peres and B. Virág, Zeros of the i.i.d. Gaussian power series: a conformally invariant determinantal process, Acta Math. **194** (2005), 1–35.

[16] H. Poincaré, Calcul des Probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1912.

[17] S. O. Rice, Mathematical theory of random noise, Bell. System Tech. J. **25** (1945), 46–156.

[18] L. A. Shepp and R. J. Vanderbei, The complex zeros of random polynomials, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 4365–4384.

[19] T. Shirai, Limit theorem for random analytic functions and their zeros, RIMS Kôkyûroku Bessatsu 34 (2012), 335–359.

[20] R. Tribe and O. Zaboronski, Pfaffian formulae for one dimensional coalescing and annihilating systems, Electronic Journal of Probability, **16**, Article 76 (2011).

[21] T. Umeda, 非可換不変式論としての CAPELLI 型恒等式, 2009 年度表現論シンポジウム講演集, available at `http://dml.ms.u-tokyo.ac.jp/PSRT/`

[22] A. Zvonkin, Matrix integrals and map enumeration: an accessible introduction, Combinatorics and physics (Marseilles, 1995), Math. Comput. Modelling 26 (1997), no. 8–10, 281–304.

[23] K. Zyczkowski and H. J. Sommers, Truncations of random unitary matrices, J. Phys. A, **33** (2000), 2045–2057.